Cos’è la teoria dei giochi

- Teoria matematica che intende descrivere la *scelta razionale* dei giocatori (individui, famiglie, imprese,…) in situazioni di **interazione strategica**, cioè in situazioni in cui il comportamento di un giocatore può influenzare il comportamento e/o il benessere di un altro giocatore
- Esempi: imprese che competono per conquistare il mercato (oligopolio), candidati politici che competono per ottenere dei voti, membri di una giuria che decidono su un verdetto
- La teoria dei giochi si basa su modelli, cioè rappresentazioni semplificate di situazioni reali che ci aiutano a comprendere meglio le nostre osservazioni e le nostre esperienze

Teoria della scelta razionale

- Un decisore sceglie l’azione (tra un insieme di azioni disponibili) che gli assicura **il risultato migliore** in base alle sue preferenze
- Questa teoria si basa su due componenti:

  - l’**insieme di azioni** che il decisore ha a disposizione (è un dato, es.: insieme dei panieri di consumo)

  - le **preferenze** del decisore (descritte da una funzione di utilità che dipende dal paniere scelto)
- Il *processo di scelta razionale* richiede che il soggetto sia in grado di:

  - determinare l’insieme di scelta, cioè l’insieme di azioni tra le quali può e deve selezionare l’azione da compiere

  - individuare una relazione che lega le azioni alle conseguenze delle azioni stesse

  - ordinare tutte le possibili conseguenze

  - sulla base dei punti precedenti, selezionare l’azione “migliore”

Il processo di scelta razionale può avere luogo in 3 contesti diversi:

1. Scelta in condizioni di certezza: a ogni azione è associata una e una sola conseguenza (relazione binaria di preferenza completa e transitiva rappresentabile tramite una funzione di utilità, u(·))

   - *teorema di rappresentazione*: se il # di conseguenze è finito e la relazione di preferenza è completa e transitiva, è sempre possibile individuare una u(·) che rappresenta quelle preferenze; allora selezionare l'azione migliore, significa scegliere l'azione che massimizza u(·)

2. Scelta in condizioni di incertezza: a ogni azione sono associate più conseguenze, in base a una distribuzione di probabilità esogenamente data (teoria delle decisioni, la scelta razionale richiede di massimizzare l’utilità attesa)

3. Scelta in presenza di interazione strategica: a ogni azione sono associate più conseguenze, ciò dipende dalle scelte effettuate da altri individui razionali (teoria dei giochi)

Rappresentazione dei giochi

- Forma normale o strategica per rappresentare (solitamente) giochi simultanei (tabella o matrice di payoff con 2 giocatori)
- Forma estesa per rappresentare (solitamente) giochi sequenziali (albero che mette in rilievo la tempistica del gioco)

Una classificazione dei giochi

- Cooperativi (giocatori collaborano per massimizzare i payoffs congiunti)
- Non cooperativi (più importanti in ambito economico), classificati in base alla natura e alla disponibilità di informazioni

Giochi simultanei a informazione completa

Gioco in forma normale o strategica è costituito da:

- Un insieme di giocatori (*N*)
- Un insieme di strategie per ogni giocatore $i \in N$ (S_i)
- Una funzione di payoff o di utilità per ogni giocatore $i \in N$, denominata $U_i(\cdot)$, che rappresenta le sue preferenze su tutti i possibili esiti del gioco

I giocatori scelgono simultaneamente **conoscendo tutto (ipotesi di informazione completa)** del gioco: N, S_i, U_i, $i \in N$

Gioco in forma normale a 2 giocatori

Giocatore 2

Giocatore 1

	Sinistra	Destra
Alto	3,2	2,6
Centro	4,4	3,3
Basso	6,5	1,3

Ad ogni insieme di strategie (una per giocatore), è associata una situazione sociale (o esito del gioco) che descrive tutto ciò che interessa ai giocatori.

Esempio:

N=(giocatore1, giocatore2), S_1=(Alto, Centro, Basso), S_2=(Sinistra, Destra)

U_1(Alto,Sinistra)=3, U_2(Alto,Sinistra)=2

Soluzione di un gioco

- Strategie dei giocatori e corrispondenti situazioni sociali che sono compatibili con l'**idea di scelta razionale** e con il loro grado di conoscenza delle caratteristiche del gioco stesso.
- I concetti di soluzione (equilibrio) ci permettono di predire quale sarà l'esito del gioco. Noi vedremo:
  - Eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate
  - Equilibrio di Nash
  - Equilibrio perfetto nei sottogiochi

Eliminazione Iterata delle Strategie Strettamente Dominate (EISSD)

- Def.: per un giocatore, una *strategia è strettamente dominata* (SSD) se ne esiste un’altra che assicura al giocatore in esame un payoff più elevato, qualunque sia la strategia adottata dagli altri giocatori
- Proposizione: un giocatore intelligente e razionale che conosca la struttura del gioco non giocherà mai una strategia strettamente dominata
- Proposizione: le strategie che sopravvivono all’EISSD sono tutte e sole le strategie compatibili con l’ipotesi di conoscenza comune dell’intelligenza e razionalità dei giocatori e della struttura del gioco
- Proposizione: le strategie che sopravvivono all’ EISSD non dipendono dall’ordine di eliminazione

Dilemma del prigioniero (DP)

Prigioniero 2

Prigioniero 1

	c	nc
C	$U_1(10), U_2(10)$	$U_1(1), U_2(25)$
NC	$U_1(25), U_2(1)$	$U_1(3), U_2(3)$

Gioco (simmetrico) in cui i giocatori (i due prigionieri) hanno lo stesso insieme di strategie disponibili e le stesso preferenze: $U_1(1)>U_1(3)>U_1(10)>U_1(25)$

Def.: per un giocatore, una strategia è *strettamente dominante* se gli assicura un payoff più elevato di quello ottenibile con ogni altra strategia, qualunque sia la strategia adottata dagli altri giocatori.

Equilibrio in strategie dominanti: (C, c)

- *Criterio di miglioramento di Pareto*: se tutti i componenti di una società preferiscono debolmente una certa situazione sociale rispetto ad un’altra e almeno uno la preferisce strettamente, anche la società nel suo complesso dovrà preferire la prima situazione alla seconda
- Una situazione sociale è *efficiente nel senso di Pareto* se non esiste alcun’altra situazione che è preferita debolmente da tutti i giocatori e strettamente da almeno uno di essi. Cioè, se non è possibile migliorare la situazione di qualcuno senza al contempo peggiorare quella di qualcun altro

Lavorare su un progetto comune

Gianni

Pinotto

	L molto	L poco
L molto	2,2	0,3
L poco	3,0	1,1

- In questo esempio i giocatori hanno le stesse preferenze del DP
- Equilibrio in strategie dominanti: (L poco, L poco)
- Situazione sociale che emerge dalla soluzione del gioco è Pareto inefficiente
- Altri esempi di DP: corsa agli armamenti, beni comuni, duopolio, e molti altri..

Dilemma del prigioniero con “altruismo”

Prigioniero 2

		c	nc
Prigioniero 1	C	$U_1(10,10)$,$U_2(10,10)$	$U_1(1,25)$, $U_2(1,25)$
	NC	$U_1(25,1)$, $U_2(25,1)$	$U_1(3,3)$, $U_2(3,3)$

Come DP, ma questa volta abbiamo preferenze “altruiste”, cioè: $U_1(3,3)>U_1(1,25)$, $U_1(10,10)>U_1(25,1)$. A parole: ogni prigioniero preferisce non confessare se crede che anche l’altro non confessi; mentre preferisce confessare se crede che anche l’altro confessi.

Quindi “confessare” non è più strettamente dominante, nè ci sono strategie strettamente dominate.

Qual è allora la **soluzione** del gioco?

Strategie debolmente dominate ed eliminazione iterata

- Def.: per un giocatore, una *strategia è debolmente dominata* se esiste un'altra strategia che gli assicura un payoff non-minore, qualunque sia la strategia adottata dagli altri giocatori (e un payoff strettamente maggiore per almeno una delle strategie degli altri giocatori)
- La soluzione può dipendere dall'ordine di eliminazione!

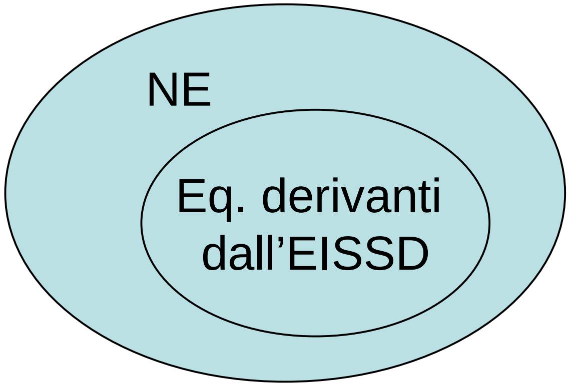
	l	r
U	3,2	2,2
M	1,1	0,0
D	0,0	1,1

Equilibrio di Nash (EN)

- Def.: data la strategia adottata dagli altri giocatori, una *risposta ottima* per un certo giocatore è una strategia che massimizza la sua utilità
- Un EN è un insieme di strategie, una per giocatore, tale che ogni giocatore gioca una risposta ottima alle strategie adottate dagli altri giocatori (nessuno ha incentivo a deviare unilateralmente)
- Proposizione: se la procedura di EISSD conduce a una sola soluzione, essa rappresenta necessariamente anche l'unico EN del gioco

Gioco con un solo EN e nessuna SSD

	l	m	r
U	2,2	1,0	1,1
M	1,0	4,1	2,3
D	0,1	3,3	3,0



Gioco di coordinamento puro: Brera o Colosseo?

	b	c
B	1,1	0,0
C	0,0	1,1

Si ha un *gioco di coordinamento puro* se, per ogni coppia di situazioni sociali, quando un giocatore preferisce la prima alla seconda, anche tutti gli altri giocatori manifestano la medesima preferenza

Gioco di competizione pura: matching pennies ("testa o croce" o "pari o dispari")

	t	c
T	1,-1	-1,1
C	-1,1	1,-1

Si ha un *gioco di competizione pura* se, per ogni coppia di situazioni sociali, quando il primo giocatore preferisce la prima alla seconda, il secondo giocatore preferisce la seconda alla prima

Esempio. Produttore già installato nel mercato (I) e produttore che sta entrando (E) con un nuovo prodotto: I preferisce che il nuovo prodotto sia diverso dal suo; E preferisce che sia simile

Cooperazione e competizione

Battaglia dei sessi (BS)

	b	f
B	3,1	0,0
F	0,0	1,3

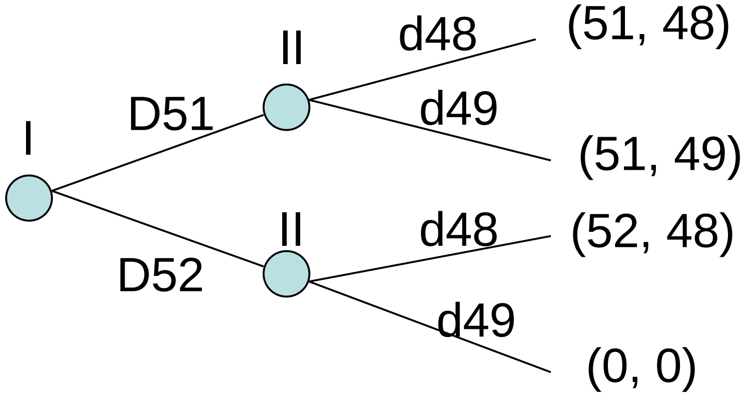
Esempi di BS: due dirigenti politici dello stesso partito con posizioni diverse su un tema importante; due imprese che si fondono e devono scegliere una tecnologia comune

Chicken (gioco tra ragazzi)

	s	c
S	1,1	0,2
C	2,0	-1,-1

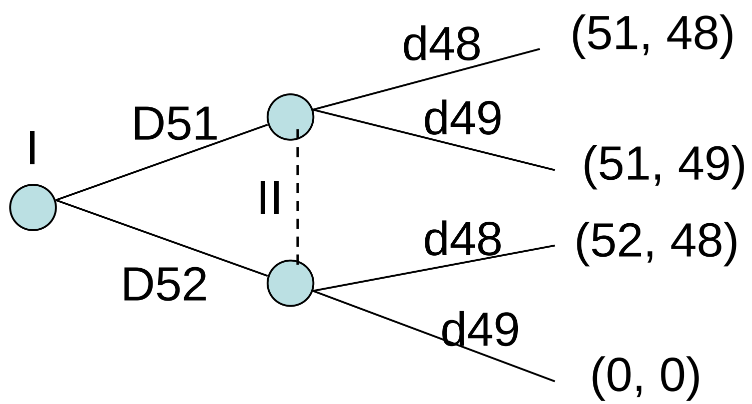
Giochi in forma estesa

- La forma estesa descrive esplicitamente la struttura sequenziale del gioco (cioè la tempistica con cui i giocatori scelgono)
- È rappresentato tramite un diagramma detto *albero* del gioco
- Esempio (informazione perfetta): il giocatore I deve scegliere tra “dichiarare 51” (D51) oppure “dichiarare 52” (D52); il giocatore II osserva l’azione di I e dopo sceglie tra “dichiarare 48” (d48) oppure “dichiarare 49” (d49). I payoff (utilità) dei giocatori sono i seguenti: se la somma delle dichiarazioni è ≤ 100, ogni giocatore avrà un’utilità uguale alla sua dichiarazione; se la somma delle dichiarazioni è > 100, ogni giocatore avrà un’utilità uguale a zero.



Giochi in forma estesa

- Esempio (informazione imperfetta): il giocatore II deve scegliere la sua dichiarazione dopo del giocatore I ma senza osservare la sua mossa



Per modellare la situazione informativa dei giocatori, cioè quello che sanno nel momento in cui scelgono, definiamo lo *stato informativo:*

Uno stato informativo per un giocatore è un insieme di nodi (eventualmente anche uno solo) che per tale giocatore sono indistinguibili; cioè, quando uno dei nodi dello stato informativo viene raggiunto, l'individuo sa solo che uno di tali nodi è stato raggiunto, ma non sa quale

Nota: da ogni nodo di uno stato informativo devono partire la stesse mosse

Giochi in forma estesa: definizioni

- Un gioco in forma estesa con n giocatori è un albero dotato di un nodo iniziale, al quale sono associate delle etichette e dei payoff in base alle regole seguenti:

  - i nodi che appartengono allo stesso stato informativo sono collegati tramite una linea tratteggiata. Quando un certo nodo viene raggiunto, il giocatore sa solo che è stato raggiunto lo stato informativo al quale il nodo appartiene, non il nodo esatto

  - ogni stato informativo che non sia un nodo terminale ha un'etichetta-giocatore, la quale definisce chi deve muovere se lo stato informativo viene raggiunto

  - ogni alternativa in ogni nodo ha un'etichetta-mossa. Ai nodi dello stesso stato informativo devono essere associate le stesse etichette-mossa

  - ad ogni nodo terminale è associato un payoff per ogni giocatore, che rappresenta l'utilità associata al raggiungimento di quel nodo

Giochi in forma estesa: definizioni

- Una *strategia* (pura) per un giocatore in un gioco in forma estesa è una regola che associa una mossa a ogni stato informativo
- Un gioco è caratterizzato da *informazione perfetta* se tutti gli stati informativi sono “singleton”, cioè contengono un solo nodo
- Si ha un gioco con informazione imperfetta altrimenti
- **N.B.**: Diverso è il concetto di informazione completa/incompleta, che riguarda la conoscenza circa la struttura del gioco (numero di giocatori, strategie, pay-off)
- Un gioco può essere ad informazione completa ed imperfetta

L’idea di razionalità futura

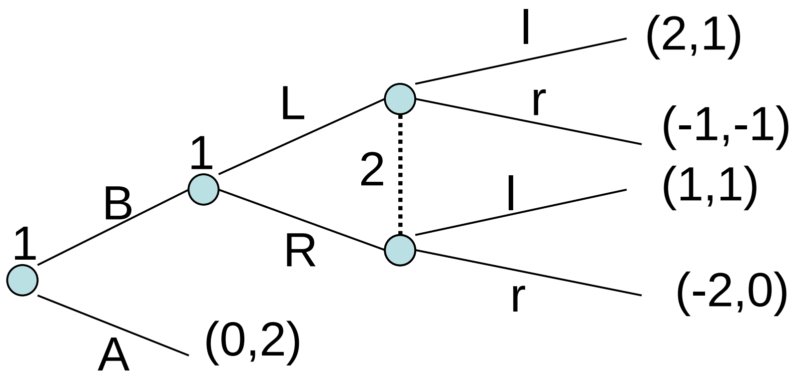
- DEFINIZIONE: L’idea di razionalità futura richiede che, se ci poniamo in un certo momento del gioco, la decisione del giocatore in quell’istante sia parte di una strategia ottima per la continuazione del gioco
- Due modi di applicare questo concetto:

1. Induzione a ritroso
2. Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi

- *Induzione a ritroso* (backward induction): un insieme di strategie soddisfa il criterio di induzione a ritroso se, a partire da ogni stato informativo, identifica un comportamento dei giocatori compatibile con l’ipotesi di conoscenza comune della struttura del gioco e dell’intelligenza e razionalità dei giocatori
- Esempio: gioco tra monopolista e potenziale entrante

Induzione a ritroso

- In un gioco con informazione perfetta, l’ipotesi di conoscenza comune dell’intelligenza e razionalità dei giocatori e della struttura del gioco implica la soluzione di induzione a ritroso
- Informazione imperfetta e induzione a ritroso: esempio di gioco risolvibile per induzione a ritroso



Equilibrio perfetto nei sottogiochi (EPS)

- Def.: un *sottogioco* è una parte del gioco in forma estesa che inizia con un "singleton" e contiene tutti i nodi che seguono
- Def.: un *EN* è *perfetto nei sottogiochi* se è un EN del gioco completo e se le prescrizioni di tale eq. relativamente ad ogni sottogioco rappresentano un EN di quel sottogioco
- Teorema (Selten, 1965): Ogni gioco con un numero finito di strategie pure ha sempre almeno un EPS
- In un gioco con informazione perfetta l'applicazione del procedimento di induzione a ritroso e il calcolo degli EPS conducono agli stessi risultati
- Un EPS è un EN ma non è necessariamente vero il contrario
- Esempio: gioco tra monopolista e potenziale entrante